

数 学 問 題

(平成 31 年度)

【注意事項】

1. この問題冊子は「数学」である。
2. 試験時間は 120 分である。
3. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない。ただし、表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
4. 試験開始後すぐに、以下の 5 および 6 に記載されていることを確認すること。
5. この問題冊子の印刷は 1 ページから 4 ページまでである。
6. 解答用紙は問題冊子中央に 4 枚はさみこんである。
7. 問題冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は、手をあげて監督者に申し出ること。
8. 試験開始後、4 枚ある解答用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること（1 枚につき受験番号は 2 箇所、氏名は 1 箇所）。
9. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
10. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は採点されない場合もあるので注意すること。
11. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
12. 解答用紙を切り離したり、持ち帰ってはいけない。
13. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等、やむを得ない場合には、手をあげて監督者を呼び、指示に従うこと。
14. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

〔I〕以下の問いに答えなさい。ただし、解答のみを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(1) 正の約数の個数が10個である2桁の自然数をすべて求めなさい。

(2) 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2na_n + 3},$$

$$a_1 = 1$$

で定められる数列 a_n の一般項を n の式で表しなさい。ただし、 n は1以上の自然数とします。

(3)

$$\frac{1}{\tan \frac{\pi}{24}} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$$

は整数です。その値を求めなさい。

(4) b, c を実数とし、 $f(x) = x^2 + bx + c$ とします。また、 $g(x)$ を

$$\begin{cases} x \leq -1 \text{ のとき, } & g(x) = -1, \\ x > -1 \text{ のとき, } & g(x) = x \end{cases}$$

と定めます。 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが異なる2点で接するとき、 b と c の値を求めなさい。

〔Ⅱ〕以下の問いに答えなさい。

(1) x, y, z が 2 以上の整数であるとき, 不等式

$$\frac{xyz - 1}{(x - 1)yz} < \frac{xyz}{(x - 1)(y - 1)(z - 1)}$$

が成り立つことを証明しなさい。

(2) x, y, z が $3 \leq x < y < z$ を満たす奇数であるとき, 不等式

$$1 < \frac{xyz - 1}{(x - 1)(y - 1)(z - 1)} < 3$$

が成り立つことを証明しなさい。

(3) 関数

$$g(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

が次の二つの条件 (i), (ii) を満たすとき, A, B, C の値を求めなさい。

(i) 方程式

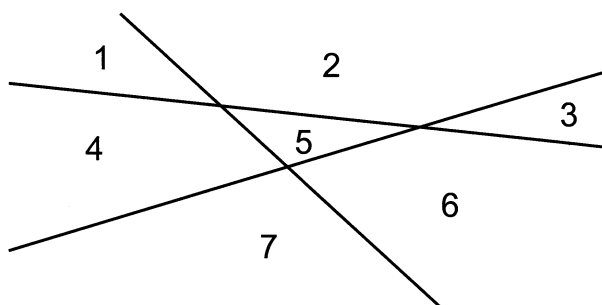
$$g(x) = 0$$

は異なる三つの整数を解に持ち, さらに, それらの解はすべて 3 以上の奇数です。

(ii) $\frac{A + B + 2C + 2}{A + B + C + 1}$ は整数です。

〔Ⅲ〕以下の問いに答えなさい。

- (1) 平面上に3本の直線を引くとき、下図のようにすれば、平面を7つの領域に分割することができます。平面上に5本の直線を引くとき、平面を最大でいくつの領域に分割することができますか。答えのみ記しなさい。



- (2) n を2以上の自然数とします。平面上に n 本の直線を引くとき、それらの交点の数は最大でいくつですか。 n を使った式で表しなさい。
- (3) n を自然数とします。平面上に n 本の直線を引くとき、平面を最大でいくつの領域に分割することができますか。 n を使った式で表しなさい。

〔IV〕以下の問いに答えなさい。

(1) $t = \tan x$ と置換することで, 不定積分

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

を求めなさい。

(2) n を自然数とするとき, 関数 $\frac{\cos x}{\sin^n x}$ の導関数を求めなさい。

(3) n を 3 以上の自然数とするとき,

$$\int \frac{dx}{\sin^n x \cos x} = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cos x}$$

が成り立つことを証明しなさい。

(4) 定積分

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$$

の値を求めなさい。