横浜市立大学　データサイエンス研究科

データサイエンス専攻　博士前期課程

サンプル問題（「基礎的数学」）

■ 電卓の使用について

◇ 使用可の電卓

四則演算（+－ ×÷）や百分率(%)、平方根(√)の計算ができる一般電卓又は事務用電卓

◇ 使用不可の電卓

上記の電卓を超える計算機能を持つ関数電卓やプログラム電卓、電卓機能を持つ携帯端末

DS 専攻博士前期課程サンプル問題（「基礎的数学」）

問 1　以下の問いに答えなさい。

（１）$\sin x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)x^{2k-1}$ と表したときの関数 $f(k)$ について、$f(k)$ を適切な k の式で表現しなさい。

（２）関数 $z = \log(x^2+y^2)$ の 2 次偏導関数 z_{xx}, z_{yy} について、$z_{xx}+z_{yy}$ を計算しなさい。

（３）領域 $D = \{(x,y) |\ x^2+y^2 \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0\}$ に対する 2 重積分 $\displaystyle\iint_D 3x\,dx\,dy$ の値を求めなさい。

$\boxed{\text{問 }\mathbf{2}}$

（1）3 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ x & 1 & x \\ x^2 & x & 1 \end{pmatrix}$ に対して、以下の問いに答えなさい。

(a) $x = 0$ のとき、A の逆行列を求めなさい。

(b) A が逆行列を持つための、実数 x の条件を答えなさい。

（2）3 次の正方行列 $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して、以下の問いに答えなさい。

(a) B のすべての固有値、および対応する固有ベクトルを求めなさい。

(b) 自然数 n に対し、B^n を求めなさい。

サンプル問題の略解

$\boxed{\textbf{問 1}}$ の略解

（1）$\sin x$ のマクローリン展開の式から，$f(k) = \dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}$ と表せる。

（2）$z_{xx} = \dfrac{2}{x^2+y^2} - \dfrac{4x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $z_{yy} = \dfrac{2}{x^2+y^2} - \dfrac{4y^2}{(x^2+y^2)^2}$ のように計算できるので，$z_{xx} + z_{yy} = 0$ が求められる。

（3）$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ のように変換した極座標では領域 D は領域 $E = \{(r,\theta)|0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\}$ が対応するので,

$$\iint_D 3xdxdy = 3\iint_E (r\cos\theta)rdrd\theta = 3\int_0^1 r^2dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = 1.$$

$\boxed{\textbf{問 2}}$ の略解

（１） (a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} |A| &= 1 + x^2 - 2x^3 - x^2 - x^2 + 2x \\ &= -(x-1)(x+1)(2x+1) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

であるので、求める x の条件は $x \neq 1$ かつ $x \neq -1$ かつ $x \neq -\dfrac{1}{2}$。

（２） (a) それぞれ、

$$2, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -1, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & -2(-1)^n & 1 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n &= \begin{pmatrix} 2^n & -2(-1)^n & 1 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n & -2^n + 1 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$