

4 2

【理学部】

数 学 問 題

2024(令和6)年度

【注意事項】

1. 試験時間は120分である。
2. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない。ただし、表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
3. この問題冊子の印刷は1ページから4ページまでである。
4. 解答用紙は問題冊子中央に4枚はさみこんである。
5. 問題冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は、手をあげて監督者に申し出ること。
6. 試験開始後、4枚ある解答用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること（1枚につき受験番号は2箇所、氏名は1箇所）。
7. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
8. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は、採点されない場合もあるので注意すること。
9. 解答用紙を切り離したり、持ち帰ってはいけない。
10. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
11. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等、やむを得ない場合には、手をあげて監督者を呼び、指示に従うこと。
12. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

〔I〕以下の各問いに答えなさい。ただし、解答のみを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(1) a を 0 ではない実数とします。曲線 $y = ax^2 + 2ax + a + 1$ と直線 $y = ax + a$ が接するとき、 a の値を求めなさい。

(2) 球 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z = 35$ と平面 $x + 2y + 3z = 2$ の共通部分である円の面積を求めなさい。

(3) O を原点とする座標平面上の曲線 $C: 4x^2 + y^2 = (x^2 + y^2)^2$ の上を点 $P(x, y)$ が動いているとき、点 $P(x, y)$ の y 座標を最大にするような線分 OP の長さを求めなさい。

(4) 数列

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}, \dots$$

の左から第 n 番目に出現する項を第 n 項と呼ぶことにします。たとえば、第 4 項は $\frac{1}{3}$ 、第 8 項は $\frac{2}{3}$ となります。このとき、第 200 項を求めなさい。

〔Ⅱ〕

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{3} \quad \dots\dots \quad (\text{条件 A})$$

が成り立つとき、次の各問いに答えなさい。

(1) $\sin \theta \cos \theta$ の値を求めなさい。

(2) $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta$ の値を求めなさい。

(3) (条件 A) に加えて、さらに $-360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ かつ $\sin \theta < \cos \theta$ をみたす異なる θ の個数を求めなさい。

〔Ⅲ〕 1 から 9 までの数字を書いたカードが 9 枚あります。このカードを用いた操作について、次の各問いに答えなさい。ただし、各カードに書かれている数字は 1 つだけであり、異なるカードに書かれている数字は異なるものとします。

(1) 9 枚のカードを 1 枚ずつ 9 人に配り、カードの数字をおぼえてから 9 枚の封筒を用意し、それぞれの封筒に 1 枚ずつカードを入れます。封筒に入れたカードの数を読みとることはできません。この封筒をランダムに 9 人に 1 つずつ再配布します。9 人のうち、ちょうど 5 人が元のカードを手にする確率を求めなさい。

(2) 9 枚のカードからランダムに 3 枚を選びます。このように選ばれたカードの書かれた数字の大きい順に x, y, z とします。 $x - y = y - z$ となる場合の確率を求めなさい。

(3) 左から順に a_1, a_2, \dots, a_9 とラベルがつけられている箱に 9 枚のカードをランダムに入れます。ただし、ひとつの箱に入るカードは 1 枚だけです。箱 a_i ($i = 1, 2, \dots, 9$) の中にあるカードの数字を、箱 a_i それぞれに割り当てられるものとして、その数字で a_i の大小を考えることにしました。たとえば、箱 a_1 にカード 3 が入り、箱 a_5 にカード 1 が入っているときには $a_1 > a_5$ であるなどということにします。

いま、 a_i の大小関係が条件

- $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$
- $a_6 < a_5 < a_4$
- $a_6 < a_7 < a_8 < a_9$

をみたすとき、このような関係となるカードの並び方は何通りありますか。

[IV] 以下の各問いに答えなさい。

(1) 関数 $\tan x$ の導関数を求めなさい。

(2) 関数 $\frac{1}{x \sin x + \cos x}$ の導関数を求めなさい。

(3) 不定積分 $\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$ を求めなさい。