

## 7 2 【データサイエンス学部】

### 数 学 問 題

2023(令和5)年度

#### 【注意事項】

1. 試験時間は 120分 である。
2. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない。ただし、表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
3. この問題冊子の印刷は1ページから6ページまでである。
4. 解答用紙は問題冊子中央に3枚はさみこんである。
5. 問題冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は、手をあげて監督者に申し出ること。
6. 試験開始後、3枚ある解答用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること（1枚につき受験番号は2箇所、氏名は1箇所）。
7. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
8. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は、採点されない場合もあるので注意すること。
9. 問題は必答問題と選択問題に分かれている。

問題番号	〔Ⅰ〕	〔Ⅱ〕	〔Ⅲ〕	〔Ⅳ〕	〔Ⅴ〕
選択方法	必答	必答	いずれか1題を選択解答		

10. 選択問題は、解答する問題番号を、必ず該当する解答用紙の所定の欄に記入すること。
11. 解答用紙を切り離したり、持ち帰ってはいけない。
12. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
13. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等、やむを得ない場合には、手をあげて監督者を呼び、指示に従うこと。
14. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

(必答問題)

〔 I 〕 以下の各問いに答えなさい。ただし、解答のみを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(1)  $2^{\log_4 9}$  の値を計算しなさい。

(2) 複素数  $z$  が  $z^4 = z^2 - 1$  をみたすとき、 $z^{40} + 2z^{10} + \frac{1}{z^{20}}$  の値を求めなさい。

(3) 方程式

$$\frac{1}{2 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sin^2 x} = \frac{64}{63}$$

の解  $x$  のうち、 $0 \leq x \leq 180^\circ$  の範囲にあるものの個数を求めなさい。

(4) 1つの問題につき、その解答の候補が5個提示されている試験があります。各問題に対して正解はちょうど1つだけ存在し、解答者は各問題に対して、必ず1つの解答を選択しなければならないものとします。このような問題が5問ある試験に対して、各問題の解答の候補からランダムにひとつを選んで答えることにします。このとき、5問中3問が正解となる確率を求めなさい。

(必答問題)

〔Ⅱ〕 中の見えない箱と十分な枚数の白いカードを用意します。用意した白いカードは書き込みが可能です。書き込みの有無や書かれた内容に触って判別することはできないものとします。このとき、以下の各問いに答えなさい。

(1) 新しい白いカードを用意して箱に入れておきます。いま、箱の中からすべての白いカードを取り出し、0と書き込んだカードを $a$ 枚作成します。また、1と書き込んだカードを $b$ 枚、2と書き込んだカードも $c$ 枚作成します。これら数字を書き込んだカードのみを箱の中にすべて戻して、よくかきまぜてから、2枚のカードを箱から取り出したとき、カードに書かれている数の和が3以上になる確率を $a, b, c$ を用いて書き表しなさい。ただし、 $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ とします。

(2) 最初に新しい白いカードを用意して箱に入れておきます。いま、箱の中からすべての白いカードを取り出し、0と書いたカードを $d$ 枚作成します。白いままのカードは $e$ 枚です。箱の中にすべてのカードを戻し、よくかきまぜます。次に、投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ等しくなる公平な硬貨を1枚用意します。また、箱の中にあるものとは別に白いカードを用意します。この別途用意したカードは十分な枚数があって、必要なだけ使うことができます。用意した硬貨を投げ、表が出たら、箱の中とは別に用意した白いカード1枚に0と書いて箱の中に入れます。裏が出たら、箱の中とは別に用意した白いカード1枚を取り、なにも書かないで箱に入れます。

硬貨を $n$ 回投げたあとに、箱の中からカードを1枚取り出したとき、そのカードに0と書かれている確率を $d, e, n$ を用いて書き表しなさい。

(3) あらためて、新しい白いカードを $x$ 枚用意して空の箱に入れておきます。この箱から $m$ 枚のカードを取り出し、すべてに1と書きます。すべて書き終わったら、すべてのカードを箱に戻し、よくかきまぜてから $n$ 枚のカードを取り出します。この取り出したカード $n$ 枚のうち、ちょうど $k$ 枚に1と書かれている確率を $x, m, n, k$ を用いて書き表しなさい。ただし、 $k \leq m \leq x, k \leq n \leq x$ とします。

(選択問題) 〔Ⅲ〕～〔Ⅴ〕は、いずれか1題を選択し、解答すること

〔Ⅲ〕 空間内の2つの直線  $l: 2x - 4 = y = 2z + 2$  と  $m: 6 - 2x = y - 5 = z + 5$  について、以下の各問いに答えなさい。

- (1)  $l, m$  両方の直線の方向ベクトルに垂直なベクトル  $\vec{p}$  を求めなさい。
- (2) (1) で求めた  $\vec{p}$  に平行な直線  $n$  が  $l, m$  とそれぞれ点  $P, Q$  とで交わる時、 $P, Q$  それぞれの座標および直線  $n$  の方程式を求めなさい。
- (3) 線分  $PQ$  を直径として持つような球の方程式を求めなさい。

(選択問題) 〔Ⅲ〕～〔Ⅴ〕は、いずれか1題を選択し、解答すること

〔Ⅳ〕  $|x| < 1$  となる  $x$  に対して関数  $S(x)$  を

$$S(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

として定義します。このとき、以下の各問いに答えなさい。

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x}$  を求めなさい。

(2)  $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  を求めなさい。

(3) 不定積分  $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$  を求めなさい。

(4) 定積分  $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} S(x) dx$  を求めなさい。

(選択問題) 〔Ⅲ〕～〔Ⅴ〕は、いずれか1題を選択し、解答すること

〔Ⅴ〕  $a$  を正の整数とします。箱の中に、各々に  $1, 2, \dots, a$  の整数がひとつずつ書かれているカードが  $a$  枚入っています。この箱から無作為にカードを1枚取り出し、そのカードに書かれた数字を記録してから、そのカードを箱に戻すという試行を  $n$  回繰り返します。確率変数  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は  $i$  回目の試行で取り出したカードに書かれた数字を表し、確率変数  $M = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$  は標本平均とします。このとき、以下の各問いに答えなさい。

(1)  $a = 26$  のとき、 $X_i$  の平均  $E(X_i)$  と分散  $V(X_i)$  を求めなさい。

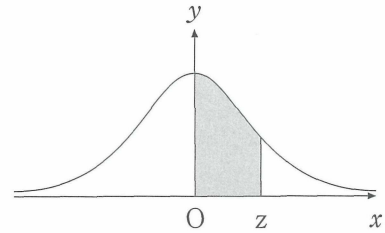
(2)  $a = 26$  のとき、箱の中から、偶数が書かれているカードをすべて取りのぞき、数字が奇数のカードのみを箱の中に残しました。この箱から無作為にカードを1枚取り出し、そのカードに書かれた数字を記録してから、そのカードを再び箱に戻す試行を  $n$  回繰り返します。確率変数  $Y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は  $i$  回目の試行で取り出したカードに書かれた数字を表すものとします。 $Y_i$  の平均  $E(Y_i)$  と分散  $V(Y_i)$  を求めなさい。

(3)  $a = 26$  のとき、再び箱の中に  $a$  枚のカードをすべて入れて、この箱から無作為にカードを1枚取り出し、そのカードに書かれた数字を記録してから、そのカードを再び箱に戻す試行を  $n$  回繰り返す、 $i$  回目の試行で取り出したカードに書かれた数字を確率変数  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) で表します。確率変数  $M$  の標準偏差を  $\sigma(M)$  で表すとき、 $C = \frac{\sigma(M)}{E(M)}$  について、 $C < 0.1$  となるために必要な自然数  $n$  の最小値を求めなさい。

(4) (3) の試行を  $n = 100$  回繰り返したとき、標本平均  $M$  の値は  $12$  であり、標本標準偏差の値は  $8$  であったとします。 $M$  の確率分布を正規分布で近似し、 $X_i$  の未知の母平均  $m$  の信頼度  $95\%$  の信頼区間を小数点以下第2位まで求めなさい。ただし、 $X_i$  の母標準偏差には標本標準偏差の値を代入しなさい。

# 正規分布表

下表は、標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49897	0.49900
3.1	0.49903	0.49906	0.49910	0.49913	0.49916	0.49918	0.49921	0.49924	0.49926	0.49929
3.2	0.49931	0.49934	0.49936	0.49938	0.49940	0.49942	0.49944	0.49946	0.49948	0.49950
3.3	0.49952	0.49953	0.49955	0.49957	0.49958	0.49960	0.49961	0.49962	0.49964	0.49965
3.4	0.49966	0.49968	0.49969	0.49970	0.49971	0.49972	0.49973	0.49974	0.49975	0.49976
3.5	0.49977	0.49978	0.49978	0.49979	0.49980	0.49981	0.49981	0.49982	0.49983	0.49983
3.6	0.49984	0.49985	0.49985	0.49986	0.49986	0.49987	0.49987	0.49988	0.49988	0.49989
3.7	0.49989	0.49990	0.49990	0.49990	0.49991	0.49991	0.49992	0.49992	0.49992	0.49992
3.8	0.49993	0.49993	0.49993	0.49994	0.49994	0.49994	0.49994	0.49995	0.49995	0.49995
3.9	0.49995	0.49995	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49996	0.49997	0.49997