

数 学 問 題

2023(令和5)年度

【注意事項】

1. 試験時間は120分である。
2. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない。ただし、表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
3. この問題冊子の印刷は1ページから4ページまでである。
4. 解答用紙は問題冊子中央に4枚はさみこんである。
5. 問題冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は、手をあげて監督者に申し出ること。
6. 試験開始後、4枚ある解答用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること（1枚につき受験番号は2箇所、氏名は1箇所）。
7. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
8. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は、採点されない場合もあるので注意すること。
9. 解答用紙を切り離したり、持ち帰ってはいけない。
10. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
11. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等、やむを得ない場合には、手をあげて監督者を呼び、指示に従うこと。
12. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

〔 I 〕 以下の各問いに答えなさい。ただし、解答のみを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(1) $2^{\log_4 9}$ の値を計算しなさい。

(2) 複素数 z が $z^4 = z^2 - 1$ をみたすとき、 $z^{40} + 2z^{10} + \frac{1}{z^{20}}$ の値を求めなさい。

(3) 方程式

$$\frac{1}{2 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sin^2 x} = \frac{64}{63}$$

の解 x のうち、 $0 \leq x \leq 180^\circ$ の範囲にあるものの個数を求めなさい。

(4) 1つの問題につき、その解答の候補が5個提示されている試験があります。各問題に対して正解はちょうど1つだけ存在し、解答者は各問題に対して、必ず1つの解答を選択しなければならないものとします。このような問題が5問ある試験に対して、各問題の解答の候補からランダムにひとつを選んで答えることにします。このとき、5問中3問が正解となる確率を求めなさい。

〔Ⅱ〕 中の見えない箱と十分な枚数の白いカードを用意します。用意した白いカードは書き込みが可能ですが、書き込みの有無や書かれた内容を触って判別することはできないものとしてします。このとき、以下の各問いに答えなさい。

(1) 新しい白いカードを用意して箱に入れておきます。いま、箱の中からすべての白いカードを取り出し、0と書き込んだカードを a 枚作成します。また、1と書き込んだカードを b 枚、2と書き込んだカードも c 枚作成します。これら数字を書き込んだカードのみを箱の中にすべて戻して、よくかきまぜてから、2枚のカードを箱から取り出したとき、カードに書かれている数の和が3以上になる確率を a, b, c を用いて書き表しなさい。ただし、 $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ とします。

(2) 最初に新しい白いカードを用意して箱に入れておきます。いま、箱の中からすべての白いカードを取り出し、0と書いたカードを d 枚作成します。白いままのカードは e 枚です。箱の中にすべてのカードを戻し、よくかきまぜます。次に、投げたときに表と裏の出る確率がそれぞれ等しくなる公平な硬貨を1枚用意します。また、箱の中にあるものとは別に白いカードを用意します。この別途用意したカードは十分な枚数があって、必要なだけ使うことができます。用意した硬貨を投げ、表が出たら、箱の中とは別に用意した白いカード1枚に0と書いて箱の中に入れます。裏が出たら、箱の中とは別に用意した白いカード1枚を取り、なにも書かないで箱に入れます。

硬貨を n 回投げたあとに、箱の中からカードを1枚取り出したとき、そのカードに0と書かれている確率を d, e, n を用いて書き表しなさい。

(3) あらためて、新しい白いカードを x 枚用意して空の箱に入れておきます。この箱から m 枚のカードを取り出し、すべてに1と書きます。すべて書き終わったら、すべてのカードを箱に戻し、よくかきまぜてから n 枚のカードを取り出します。この取り出したカード n 枚のうち、ちょうど k 枚に1と書かれている確率を x, m, n, k を用いて書き表しなさい。ただし、 $k \leq m \leq x, k \leq n \leq x$ とします。

〔Ⅲ〕 空間内の2つの直線 $l: 2x - 4 = y = 2z + 2$ と $m: 6 - 2x = y - 5 = z + 5$ について、以下の各問いに答えなさい。

(1) l, m 両方の直線の方向ベクトルに垂直なベクトル \vec{p} を求めなさい。

(2) (1) で求めた \vec{p} に平行な直線 n が l, m とそれぞれ点 P, Q とで交わる時、 P, Q それぞれの座標および直線 n の方程式を求めなさい。

(3) 線分 PQ を直径として持つような球の方程式を求めなさい。

〔IV〕 $|x| < 1$ となる x に対して関数 $S(x)$ を

$$S(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

として定義します。このとき、以下の各問いに答えなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x)}{x}$ を求めなさい。

(2) $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を求めなさい。

(3) 不定積分 $\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$ を求めなさい。

(4) 定積分 $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} S(x) dx$ を求めなさい。