

## 4 2

## 【理学部】

### 数 学 問 題

2022(令和4)年度

#### 【注意事項】

1. 試験時間は120分である。
2. 試験開始の合図まで、この問題冊子を開いてはいけない。ただし、表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
3. この問題冊子の印刷は1ページから4ページまでである。
4. 解答用紙は問題冊子中央に4枚はさみこんである。
5. 問題冊子に落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は、手をあげて監督者に申し出ること。
6. 試験開始後、4枚ある解答用紙の所定の欄に、受験番号と氏名を記入すること（1枚につき受験番号は2箇所、氏名は1箇所）。
7. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
8. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は、採点されない場合もあるので注意すること。
9. 解答用紙を切り離したり、持ち帰ってはいけない。
10. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
11. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等、やむを得ない場合には、手をあげて監督者を呼び、指示に従うこと。
12. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

〔I〕以下の各問いに答えなさい。ただし、解答のみを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(1) 自然数の集合

$$A = \{n^5 + 1 \mid n = 1, 2, \dots, 1000\}$$

を考えるとときに、この集合  $A$  の要素であり、かつ 3 の倍数となるものの個数を求めなさい。

(2) 複素数  $\alpha$  を  $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  とおくとき、 $\alpha^{18} + \alpha^6 + \alpha^4 + \alpha^2$  の値を求めなさい。

(3) 円  $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$  の中心を  $C$  とおき、この円と直線  $y = x + 2$  の 2 つの交点を  $A, B$  とおくとき、三角形  $ABC$  の面積を求めなさい。

(4) 何人かで次のゲームを行うことにしました。53 枚のカードのうち、1 枚だけ「あたり」と書かれたカードを用意します。このカードをよく混ぜて、1 つの山に重ねて置きます。次に、参加者各自が 1 ～ 6 の目が出る公平なサイコロを 1 回だけ投げ、カードを見ないようにして出た目の数だけ山の上から順にとっていきます。なお、一度とったカードは再度山にはもどさないこととします。このとき、手にしたカードの中に「あたり」のカードが入っていたら、そのカードをとった参加者を勝者と決定してゲームは終了します。また、いずれの参加者も「あたり」のカードをとることができなければ、このゲームは引き分けで終了するものとします。

参加者が 6 人のとき、このゲームが引き分けで終了する確率を求めなさい。

〔Ⅱ〕  $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$  の範囲で  $\theta$  についての関数  $f(\theta) = \cos 2\theta - 2 \sin \theta$  を考えるとき、以下の各問いに答えなさい。

(1)  $t = \sin \theta$  とおくと、 $f(\theta)$  を  $t$  で表しなさい。

(2)  $f(\theta)$  の最大値を求めなさい。また、そのときの  $\theta$  の値をすべて求めなさい。

(3)  $C$  を整数とします。 $\theta$  についての方程式  $f(\theta) + C = 0$  が異なる 2 つの解をもつような  $C$  の値をすべて求めなさい。

〔Ⅲ〕 数列  $\{a_n\}$  について、初項  $a_1$  から第  $n$  項  $a_n$  までの和  $S_n$  は  $(a_n + \alpha)^2$  の形で表すことができます。ただし、 $\alpha > 0$  です。また、この数列について、初項が  $a_1 = \frac{1}{4}$  であり、すべての  $n$  に対して  $|a_n| < \frac{1}{2}$  とします。このとき、以下の各問いに答えなさい。

(1)  $\alpha$  を求めなさい。

(2)  $a_n > 0$  のとき、 $a_{n+1}$  を  $a_n$  を用いて表しなさい。

(3)  $S_n$  を求めなさい。

〔IV〕以下の各問いに答えなさい。

(1) 不定積分  $\int t \sin t dt$  を求めなさい。

(2) 関数  $f(x)$  が常に  $f(-x) = -f(x)$  という関係式をみたすときに、定積分

$$\int_{-a}^a f(t) dt$$

の値を求めなさい。ただし、 $a > 0$  とします。

(3) 関数  $g(x)$  に対して、定積分

$$\int_{-a}^a \frac{g(t) - g(-t)}{2} dt$$

の値を求めなさい。ただし、 $a > 0$  とします。

(4) 定積分

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{t \sin t}{1 + \pi \sin^3 t} dt$$

の値を求めなさい。